

Code No. **35-NS**

Total No. of Questions : 38]

[Total No. of Printed Pages : 15

March / April, 2006

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(**New Syllabus**)

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 90

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ: i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. $6x \equiv 3 \pmod{15}$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ ?

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗೆ ವಿಲೋಮ ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

3. ಗುಣಾಕಾರದ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5 ರ ಸಮುದಾಯ $G = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ ರಲ್ಲಿ $(3 \times 4^{-1})^{-1}$ ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

4. $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಾಗ λ ದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

5. $4x^2 + 4y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $y^2 = 8x$ ಪರವಲಯಕ್ಕೆ $x + y + 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sec^{-1}(-2)$ ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

8. $\frac{(1+i)^2}{3-i}$ ನ್ನು $x + iy$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

9. $y = a^{4 \log_a x}$ ಅನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

10. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11. a/b ಮತ್ತು a/c ಆದಾಗ $a/b + c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $3x + 2y = 8$

$4x - 3y = 5$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಬಿಡಿಸಿ.

13. ಸಂಕಲನದ ಮಾಡ್ಯುಲೊ 6 ರ ಪ್ರಕಾರ $G = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ಒಂದು ಸಮುದಾಯವಾಗಿದ್ದು,

$H = \{ 0, 3 \}$ ಯು ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ G ನ ಉಪಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ಗಳು

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $2x^2 + 2y^2 - 18x + 6y - 7 = 0$ ಮತ್ತು $3x^2 + 3y^2 + 4x + ky + 3 = 0$

ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದ್ದರೆ, k ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉಪಪ್ರಧಾನ ಅಕ್ಷವು ಅದರ ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಬಿಡಿ : $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

18. $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $y = x^{\cos^{-1}x}$ ನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

20. $y = \sin x (1 + \cos x)$ ಇದರ ಬೆಲೆಯು $x = \frac{\pi}{3}$ ಆದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} = k \frac{d^2y}{dx^2}$ ನ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. a) 432 ರ ಒಟ್ಟು ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $71 \times 73 \times 75$ ನ್ನು 23 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು ? 2

24. $\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ac & bc & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

25. \mathcal{G}^+ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಮೇಯಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, $(\mathcal{G}^+, *)$ ಒಂದು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. $*$ ಕ್ರಿಯೆಯು $a * b = \frac{2ab}{3}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ. 5

26. a) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕಮಾನ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

- b) $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ಗಳು $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ನ ದಿಶಾ ಕೋಸೈನ್‌ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

- b) $x + y = 6$ ಮತ್ತು $x + 2y = 4$ ಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಏಕಮಾನಗಳಾದಾಗ ಆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಿಯತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

- b) $9x^2 - 4y^2 = 36$ ಅತಿಪರವಲಯದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ (Asymptotes) ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 3$$

b) $\tan 3x \cdot \tan 2x = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

30. a) x ನ್ನು ಕುರಿತು $\sin^2 x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $y = (\sinh^{-1} x)^2$ ಆದಾಗ,

$$(1 + x^2) y_2 + xy_1 - 2 = 0 \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 3$$

b) $x = a (\theta + \sin \theta)$ ಮತ್ತು $y = a (1 - \cos \theta)$ ಆದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = \tan \frac{\theta}{2} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 2$$

32. a) $2y = x^3 + 5x$ ಮತ್ತು $y = x^2 + 2x + 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (1, 3)

ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\int e^x \left(\frac{1+x}{(2+x)^2} \right) dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$ 3

b) $\int 4x^3 \cdot x^2 dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. $x^2 = y$ ಮತ್ತು $y = x + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) ಕ್ಯಾಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಅದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ. 4

36. a) $-1 + i\sqrt{3}$ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚತುರ್ಥಾಂತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. 6

b) $[\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

37. a) ಮೇಲ್ಮುಖ ಪಾದದ 12 ಸೆ.ಮೀ. ಆಳ ಮತ್ತು 9 ಸೆ.ಮೀ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಶಂಖು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು $1 \frac{1}{2}$ ಘನ ಸೆ.ಮೀ. /ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಂತೆ ಸುರಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. 4 ಸೆ.ಮೀ.ವರೆಗೆ ಪಾತ್ರೆಯ ತುಂಬಿದಾಗ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಸಮತಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = 1$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$(y^2 + y) dx + (x^2 + x) dy = 0. \quad 4$$

(English Version)

Instructions : i) The question paper has *four Parts – A, B, C and D.* Answer all the parts.

ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks and **Part – D** carries 20 marks.

PART – A

Answer *all the ten* questions :

10 × 1 = 10

1. Find the number of incongruent solutions for $6x \equiv 3 \pmod{15}$.

2. If the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ has no inverse, find x .

3. In a group $G = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ under multiplication modulo 5 find $(3 \times 4^{-1})^{-1}$.

4. If the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$ are perpendicular, find λ .

5. Find the centre of the circle $4x^2 + 4y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

6. If the line $x + y + 2 = 0$ touches the parabola $y^2 = 8x$, find the point of contact.

7. Find the value of $\sec^{-1}(-2)$.
8. Express $\frac{(1+i)^2}{3-i}$ in $x + iy$ form.
9. Differentiate $y = a^{4 \log_a x}$ w.r.t. x .
10. Evaluate : $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$.

PART - BAnswer any *ten* questions : $10 \times 2 = 20$

11. If a/b and a/c then prove that $a/b + c$.
12. Solve by Cramer's Rule :
- $$3x + 2y = 8$$
- $$4x - 3y = 5.$$
13. Prove that $H = \{0, 3\}$ is a sub-group of the group $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ under addition modulo 6.
14. Find the volume of the parallelopiped whose coterminous edges are $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

15. Find k for which the circles $2x^2 + 2y^2 - 18x + 6y - 7 = 0$ and $3x^2 + 3y^2 + 4x + ky + 3 = 0$ intersect orthogonally.
16. Find the eccentricity of the ellipse if its minor axis is equal to distance between foci.
17. Solve : $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.
18. Show that $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$.
19. Differentiate $y = x^{\cos^{-1}x}$ w.r.t. x .
20. Show that $y = \sin x (1 + \cos x)$ is maximum when $x = \frac{\pi}{3}$.
21. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$.
22. Find the order and degree of the differential equation,
- $$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} = k \frac{d^2y}{dx^2} .$$

PART - C

- I. Answer any *three* questions : 3 × 5 = 15
23. a) Find the number of all positive divisors and the sum of all such positive divisors of 432. 3
- b) Find the remainder when $71 \times 73 \times 75$ is divided by 23. 2

24. Prove that
$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ac & bc & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2. \quad 5$$

25. If \mathcal{Q}^+ is the set of all positive rationals, prove that $(\mathcal{Q}^+, *)$ is an Abelian group, where $*$ is defined by $a * b = \frac{2ab}{3}$. 5

26. a) If $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$, find the unit vector in the direction of $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. 3

b) If $\cos \alpha$, $\cos \beta$ and $\cos \gamma$ are direction cosines of the vector $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, show that $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. 2

II. Answer any *two* questions : 2 × 5 = 10

27. a) Find the equation of tangent to the circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ at the point } (x_1, y_1) \text{ on it. } 3$$

b) Find the equation of the circle two of whose diameters are $x + y = 6$ and $x + 2y = 4$ and whose radius is 10 units. 2

28. a) Find the eccentricity and equations to directrices of the ellipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. 3

b) Find the equations of the asymptotes of the hyperbola

$$9x^2 - 4y^2 = 36. \text{ Also find the angle between them. } 2$$

29. a) If $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$, prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 3$$

b) Find the general solution of $\tan 3x \cdot \tan 2x = 1$. 2

III. Answer any *three* of the following questions : 3 × 5 = 15

30. a) Differentiate $\sin^2 x$ w.r.t. x from first principles. 3

b) If $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$ find $\frac{dy}{dx}$. 2

31. a) If $y = (\sinh^{-1} x)^2$, prove that

$$(1 + x^2) y_2 + xy_1 - 2 = 0. \quad 3$$

b) If $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, prove that

$$\frac{dy}{dx} = \tan \frac{\theta}{2}. \quad 2$$

32. a) Show that the curves $2y = x^3 + 5x$ and $y = x^2 + 2x + 1$ touch each other at $(1, 3)$. Find the equation to common tangent. 3

b) Evaluate : $\int e^x \left(\frac{1+x}{(2+x)^2} \right) dx$. 2

33. a) Evaluate : $\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx.$ 3

b) Evaluate : $\int 4x^3 \cdot x^2 dx.$ 2

34. Find the area bounded between the curves $x^2 = y$ and $y = x + 2$.

5

PART - D

Answer any *two* of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define ellipse and derive standard equation to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 6$$

b) State Caley-Hamilton theorem. Verify the Caley-Hamilton theorem for the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. 4

36. a) Find the fourth roots of the complex number $-1 + i\sqrt{3}$ and represent them in an Argand diagram. 6

b) Prove that $[\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2$. 4

37. a) An inverted circular cone has depth 12 cms and base radius 9 cms. Water is poured into it at the rate of $1 \frac{1}{2}$ c.c./sec. Find the rate of rise of water level and the rate of increase of the surface area when depth of water is 4 cm. 6

- b) Find the general solution of $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = 1$. 4

38. a) Prove that $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$. 6

- b) Solve the differential equation $(y^2 + y) dx + (x^2 + x) dy = 0$. 4

=====